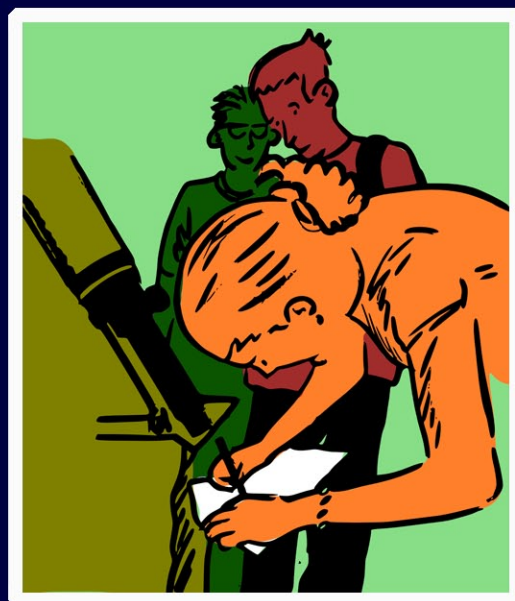


Tránsito de Venus y Unidad Astronómica

Rosa María Ros
Juan Carlos Aznar



TRÁNSITO DE VENUS Y UNIDAD ASTRONÓMICA

Rosa Maria Ros y Juan Carlos Aznar

Publicaciones de ApEA

Asociación para la Enseñanza de la Astronomía

No. 8 (Secundaria) - Junio 2005

Publicaciones de ApEA

Asociación para la Enseñanza de la Astronomía

Con la colaboración de Kutxa Espacio de la Ciencia

Dibujo de Portada:

LeBlanc

Comité de Redacción:

Simón García

Ederlinda Viñuales

Dirección:

Rosa M. Ros (Vocal Editora de Publicaciones de ApEA)

Dept. Matemática Aplicada IV

Universidad Politécnica de Catalunya

Jordi Girona 1-3, modulo C3, 08034 Barcelona

e-mail: ros@mat.upc.es

ISBN: 84-934442-2-7

D.L. B-25564-2005

Imprés a FLAIX ÒFSET

ÍNDICE

PRESENTACIÓN	7
OBJETIVOS	9
¿QUÉ ES UN TRÁNSITO DE VENUS?	11
UN POCO DE HISTORIA.....	13
EL CONCEPTO DE PARALAJE	15
EL TRÁNSITO PERMITE CALCULAR DISTANCIAS	19
EL PROBLEMA GEOMÉTRICO: DISTANCIA TIERRA-SOL.....	21
DISTANCIA ENTRE LOS DOS OBSERVADORES.....	21
DISTANCIA ENTRE LAS DOS TRAYECTORIAS OBSERVADAS.....	23
RESULTADOS USANDO LAS OBSERVACIONES DE 1769	26
RESULTADOS USANDO LAS OBSERVACIONES DE 2004	29
MÉTODO MUY SIMPLIFICADO. CÁLCULO DE LA U.A. EN 4 PASOS	33
TRÁNSITOS DE PLANETAS EXTRASOLARES	35
BIBLIOGRAFIA.....	37

PRESENTACIÓN

El pasado 8 de Junio tuvo lugar un raro acontecimiento astronómico: el paso de Venus por delante del disco solar, esto es, el tránsito de Venus. Éste evento tuvo gran relevancia en el siglo XVIII porque sirvió a la comunidad internacional para determinar la distancia de la Tierra al Sol. En esta publicación se ofrecen algunas propuestas útiles que permiten determinar la distancia Tierra-Sol a partir de los datos de observación que se presentan.

Se ha intentado, aún a riesgo de perder precisión, simplificar el desarrollo matemático para que la propuesta sea realmente utilizable en nuestros centros de secundaria (aunque en ciertos casos es más para alumnos de bachillerato que de ESO). La simplificación del planteamiento (asumiendo las hipótesis simplificativas necesarias) permite que sea inteligible para el alumnado, el cual puede seguirlo usando meramente los contenidos adquiridos en la escuela. De esta forma el problema científico de la determinación de la distancia Tierra-Sol aparece como un desafío para los alumnos de bachillerato con una solución alcanzable para sus conocimientos.

Las hipótesis adoptadas han sido sólo dos: suponer que las órbitas de Venus y la Tierra son circunferencias centradas en el Sol y que las posiciones de Venus, el centro del Sol y los observadores terrestres son coplanarias. Con estos puntos de partida el desarrollo matemático sólo precisa de la definiciones de seno, tangente y considerar que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados. En el caso de que se quiera conseguir mejores resultados es necesario aplicar también el Teorema de Pitágoras. El método de trabajo que aquí se desarrolla evidentemente no es el utilizado en la actualidad por los astrónomos profesionales. En este último los contenidos matemáticos que se utilizan son mucho más complejos y no se consideran las simplificaciones antes efectuadas, de forma que aplicando técnicas adecuadas se reducen los márgenes de error.

Para aquellos alumnos más jóvenes se proponen algunas experiencias, desarrollables en el patio de la escuela, que les acerquen a comprender el proceso del cálculo de la distancia Tierra-Sol, y que incluso puedan mezclarse con el juego, introduciendo así la ciencia como algo no aburrido. En este caso no se alcanzan resultados cuantificables y las experiencias se mueven sólo a nivel cualitativo.

Finalmente se hace constar el agradecimiento por ofrecer sus datos de observación para ser utilizados en este trabajo, a la profesora Blanca Troughton y a los alumnos de primero de bachillerato del IES "Antonio Gala" de Alahurin el Grande (Málaga) que conjuntamente con la Asociación Malagueña de Astronomía realizaron las observaciones del Tránsito de Venus desde la Plaza de la Marina en Málaga capital.

OBJETIVOS

- Determinar la distancia Tierra-Sol, la llamada unidad astronómica de distancia, usando un método simplificado que sea asequible a estudiantes de bachillerato. Se presenta pues un procedimiento para determinar la distancia mencionada usando sólo los contenidos de matemáticas que los alumnos adquieren en la educación secundaria (definiciones de las funciones trigonométricas).
- Usar los resultados de observación del tránsito del 8 de junio de 2004, para proceder a calcular el valor de la unidad astronómica de distancia. Las observaciones consideradas fueron realizadas por los alumnos de primer curso de bachillerato del IES "Antonio Gala" de Alhaurin el Grande (Málaga, España) con la ayuda de la "Sociedad Malagueña de Astronomía" y los alumnos del Collège-Lycée Saint Sébastien en colaboración con la agrupación astronómica "Astroclub Alnitak" de Landernau (Brest, Francia). Ambos lugares de observación están situados aproximadamente en el mismo meridiano, pero están muy próximos (sólo distan unos 1300 km), lo que introduce muchos errores en el resultado final de la unidad de distancia.
- Utilizar los datos de observación de las expediciones organizadas para determinar la distancia Tierra-Sol a raíz del tránsito del 3 de junio de 1769, las cuales se desplazaron a Papeete (Tahiti) y a Vardö (península Escandinava); se trata con ello de mejorar los resultados obtenidos aplicando un mismo proceso. Se han tomado estas observaciones por corresponder a dos de los lugares más alejados de los que se dispone de datos. La primera expedición fue organizada por el astrónomo P. Maximilian Hell, director del Observatorio de Viena y la segunda, que sufrió muchas bajas en su viaje a los Mares del Sur, fue capitaneada por James Cook. En este caso los observadores estaban situados, sobre el mismo meridiano, a unos 11500 km de distancia y los resultados conseguidos fueron aceptables.
- Presentar los datos de observación a los estudiantes de bachillerato de manera que ellos mismos desarrollen los cálculos y consigan calcular la unidad astronómica de distancia. En éste caso, es mas recomendable proponer como ejercicio usar las observaciones realizadas en 1769. Al estar los observadores más alejados las dos trayectorias de Venus están más distanciadas y los dibujos son mas manejables par tomar medidas sobre los mismos.
- Mostrar una simplificación notable del problema para hacerlo apto para alumnos de ESO. En este caso no se pretende conseguir obtener resultados numéricos, el único objetivo es conseguir que los alumnos puedan entender la idea principal que subyace en el proceso. Sólo se

utilizan la fórmula de la longitud de la circunferencia y relaciones de proporcionalidad. En este supuesto no se publican resultados numéricos dada la precariedad del método usado. Su interés no radica en los resultados, sólo en la presentación sencilla del proceso deductivo.

¿QUÉ ES UN TRANSITO DE VENUS?

Un tránsito de Venus tiene lugar cuando un observador desde la Tierra ve cruzar Venus siguiendo una línea recta sobre la faz del disco solar. Es algo así como un pequeño eclipse de Sol, pequeño porque el diámetro de Venus aparece como un minúsculo puntito sobre el disco del Sol (figura 1).

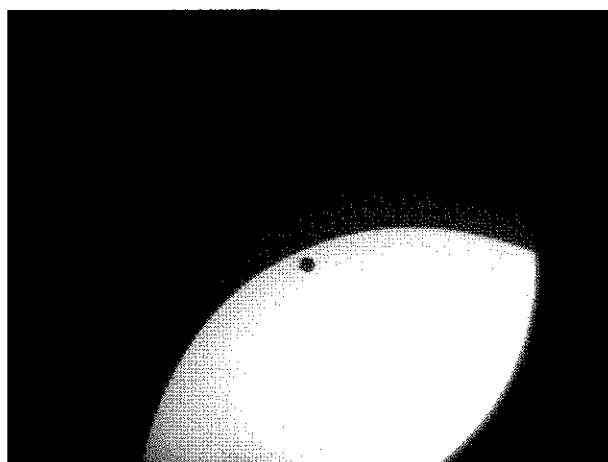


Fig. 1 Venus aparece como un puntito oscuro sobre el disco solar

Los tránsitos de Venus ocurren cuando Venus está en una conjunción inferior con respecto al Sol, es decir cuando Venus está situado entre el Sol y la Tierra. Si el plano de la órbita de Venus en torno al Sol coincidiera exactamente con el plano de la órbita terrestre, esto es, el plano de la eclíptica, habría un tránsito de Venus en cada conjunción inferior (figura 2).

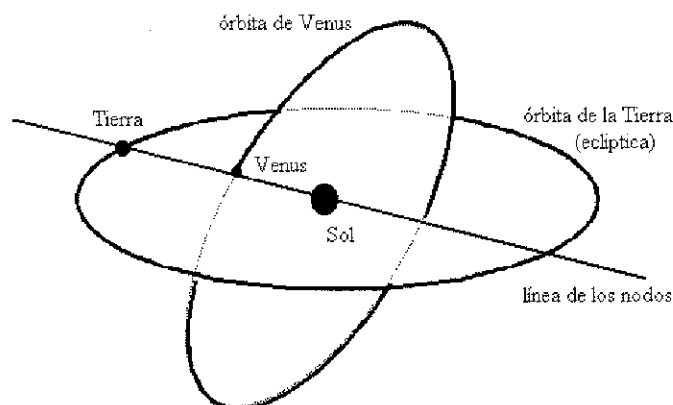


Fig. 2 Las órbitas de Venus y la Tierra (la eclíptica) no son coplanarias. El ángulo entre las dos órbitas es mucho mayor en el dibujo para que sea más apreciable

Sin embargo esto no ocurre porque el plano de la órbita de Venus forma un ángulo de 3.4 grados con el plano de la eclíptica. La latitud respecto a la

eclíptica de Venus debe ser necesariamente menor que la mitad del diámetro aparente del Sol, esto es, menos de 16 minutos de arco, para que el observador pueda ser capaz de ver a Venus cruzando por delante del disco solar. Así pues Venus debe estar muy próximo al nodo de su órbita, es decir al punto de intersección de su órbita con la eclíptica (figura 2). Como consecuencia de todas estas condiciones un tránsito ocurre aproximadamente cada 120 años y en un par de ocasiones separadas por 8 años.

7 diciembre 1631	4 diciembre 1639
6 junio 1761	3 junio 1769
9 diciembre 1874	6 diciembre 1882
8 junio 2004	6 junio 2012

tabla 1: Fechas de los tránsitos de Venus desde el siglo XVII

Hay que destacar los tránsitos de 1761 y 1769 porque marcaron un hito dentro de la cooperación científica europea con el fin de determinar por primera vez con precisión (la propia de la época) la distancia de la Tierra al Sol, la unidad astronómica de distancia.

UN POCO DE HISTORIA

Jeremiah Harrocks fue la primera persona que vio y tomó datos de observación de un tránsito de Venus el 4 de diciembre de 1639. Harrocks consideró la posibilidad de usar el tránsito para calcular la distancia de la Tierra al Sol, pero fue Edmund Halley quien lanzó las campañas de observación de los tránsitos de Venus de los años 1761 y 1769. Fue un buen ejemplo de las primeras campañas de colaboración llevadas a cabo por los científicos europeos. Fueron apostados centenares de observadores en diferentes lugares con la intención de asegurarse de que se llegara a buen puerto y, en particular, de que algunas observaciones se pudieran hacer con buenas condiciones atmosféricas. Para reducir los errores se situaron en lugares cuyas latitudes fueran lo más distantes posible. En el siglo XVIII los viajes a territorios lejanos representaban un riesgo cierto, ya que había que enfrentarse a muchos peligros naturales, a los que también se sumó en el caso del Océano Índico la guerra entre franceses e ingleses. Lo cierto es que muchos de los científicos murieron en el empeño o, por diferentes circunstancias, no pudieron obtener las preciadas observaciones.

Hay que mencionar que en 1761 se coordinaron más de 130 expediciones diferentes por todo el globo. En 1769 hubo observadores en Madras, en Santo Domingo, en California, en la Bahía de Hudson, en Tahiti, en Laponia, en la península de Kola y en Siberia. En total hubo 151 observadores en 77 localizaciones diferentes. Diversos percances dramáticos se sucedieron y los resultados no siempre respondieron a la expectación despertada. Los astrónomos españoles participaron en varias campañas. Según las referencias del Observatorio de París están documentadas seis expediciones españolas. En la tabla que recoge los datos de observación de 1769 (figura 3) publicada en "A History of Astronomy" de A. Pannekoek figuran los tiempos de observación obtenidos por Velasques en Santa Ana, en California al oeste de la costa de Méjico, y los conseguidos, también en California, por Vicente de Doz y Salvador de Medina en la misión española de San José del Cabo, que hoy todavía existe.

En la última sección de este trabajo se utilizarán algunos de los valores que figuran en la tabla de la figura 3. En particular se considerarán las observaciones obtenidas en Vardö (Noruega) y Papeete (Tahiti) por ser dos de los lugares mas alejados de los que se dispone de datos. Ambas expediciones fueron organizadas por científicos ingleses. La primera de ellas estaba formada por el astrónomo danés C. Horrebow y el joven botánico Borgrewing, que se dirigieron a Vardö, un pequeño islote en el norte de la península escandinava. El otro equipo fue a los Mares de Sur a observar el tránsito en Tahiti; unas islas descubiertas unos años antes. Estas observaciones fueron realizadas por Chales Green y un lugarteniente llamado James Cook, desconocido por aquel entonces. La expedición sufrió numerosas víctimas durante el viaje.

Estando comunicados por el observatorio desde el
 momento el paso de Venus por el Sol, los Funcion-
 arios de Craxio D. Salvador de Medina y D.
 Vicente Dor, y necesitando para el observato-
 rio de esa Academia, y llevarse al viaje va-
 rios instrumentos precisos para este fin los
 designando el Comandante de esa Compañía,
 con quien V. y los nombrados oficiales debe-
 ran entenderse en este asunto, lo participo
 a V. para su inteligencia, y a fin de que fas-
 cille las expresadas instrucciones y demás
 auxilios que necesitan con este motivo. Dios guar-
 de a V. m. D. S. J. depongo S. de T. de 1768.

Observations de la durée du passage de Venus en 1769.					
Noms des Lieux.	Observateurs.	ENTRÉE DE VENUS.		SORTIE DE VENUS.	
		Premier contact.	Second contact.	Premier contact.	Second contact.
	Messieurs.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
Wardhus, dans la Mer Glaciale	R. P. Hall.	. . .	9 14 10,6	11 27 55,6	13 41 40,4
	R. P. Sainoviev.	. . .	9 54 7,4	15 27 14,4	15 45 45
	Bargrewing.	9 16 10	9 14 32,6	11 17 18,4	15 45 32,4
Kola. . . .	Rumowski.	. . .	9 42 2	11 35 22	
Fort du Prince de Galles, dans la baie d'Hud- son.	Dymond.	0 17 0,6	1 15 15,1	7 0 42,1	7 19 10,2
	Waller.	0 17 7,6	1 15 11,1	7 0 45,5	7 19 1,2
Cajanebourg.	Planman.	. . .	9 20 45 ½		15 32 27
Ste. Anne en Californie.	Velasque.	11 55 45	0 14 10	5 33 34	6 11 59
San-Joseph en Californie.	Chappe.	11 57 17	0 17 16,9	5 34 10,3	6 13 19,1
	Droz.	11 59 14	0 17 31	5 34 47,1	6 12 41
Ile du Roi Georges, ou de Taïti, dans la Mer du Sud.	Médina.	11 59 14	0 17 30	5 34 47,1	6 12 46
	Green.	9 21 40	9 41 55 ½	11 14 3	11 32 14
	Cook.	9 25 45	9 44 15	11 14 18	11 32 2
	Solander.		9 44 3 ½		11 32 15

Fig. 3 Documento relativo a la expedición española a S. José de California y Tiempos de observación del Tránsito de Venus relativos a diversas expediciones en 1769

EL CONCEPTO DE PARALAJE

El paralaje es utilizado para medir distancias. Al observar el paso de Venus delante del disco solar se pueden obtener los paralajes de Venus y del Sol y calcular la distancia de la Tierra al Sol. Para ello basta observar el tránsito desde dos lugares suficientemente alejados de la superficie terrestre, y tomando los tiempos de tránsito de ambos se deducen los mencionados paralajes y finalmente la distancia Tierra-Sol. Para entender este método de medir distancias es necesario en primer lugar introducir el concepto de paralaje y hacer notar que dicho ángulo disminuye al aumentar la distancia. Es bueno también llevar a cabo alguna experiencia que permita entender mejor esa relación.

Como no es usual disponer, en un centro de enseñanza, de un teodolito para medir ángulos, se propone construir un sencillo cuadrante (figura 4) que permita medirlos.

Construcción de un cuadrante

Materiales necesarios: un semicírculo graduado (realmente con 90° es suficiente, pero éstos no se comercializan), una paja de tomar refrescos, cinta adhesiva, 20 cm de hilo (de pescar o que sea resistente) y un plomo de pescar.

Proceso a seguir: Primero se pega la paja al semicírculo (por la parte recta del mismo) con la cinta adhesiva (figura 4). Se introduce después un extremo del hilo por el agujero origen de los ángulos (hay semicírculos que ya llevan hecho este agujero, y si no lo tiene se puede perforar). Finalmente sujetamos el plomo al otro extremo del hilo.

Nota: Para dar más solidez al conjunto se puede fijar con cinta adhesiva una regla de 20 cm a la paja y el semicírculo.

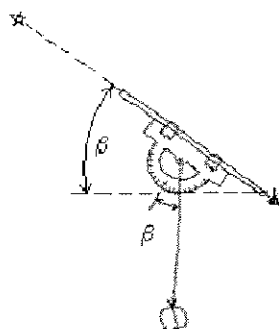


Fig. 4 Cuadrante muy fácil de construir

Experiencia 1: Relación entre ángulos y distancias

Podemos comprobar que la distancia a que se encuentra un objeto y el ángulo bajo el que lo observamos están relacionados.

Comenzaremos fijando un palo (2 ó 2.5 m de largo) perpendicularmente al suelo del patio. En lugar del palo también podemos dibujar una línea en la pared del patio. Pintamos dos puntos **A** y **B** sobre el palo o la línea, de acuerdo con la figura 5. Para simplificar el contenido matemático es bueno pintar el punto **B** a una distancia del suelo que coincida aproximadamente con la altura de los alumnos que van a realizar la experiencia. A continuación dibujamos el punto **A** a un metro, o metro y medio, por encima del punto **B**. La distancia **AB** es conocida por los alumnos. Los estudiantes deben observar con el cuadrante el ángulo β desde un punto **C** convenientemente alejado. Éstos comprueban fácilmente que a medida que la distancia r aumenta, el ángulo β va disminuyendo. Dicho ángulo, el paralaje, es menor cuanto más alejado esta el objeto de nosotros. Precisamente éste es uno de los problemas que aparecen al considerar distancias en el sistema solar: que los ángulos que hay que medir son muy pequeños.

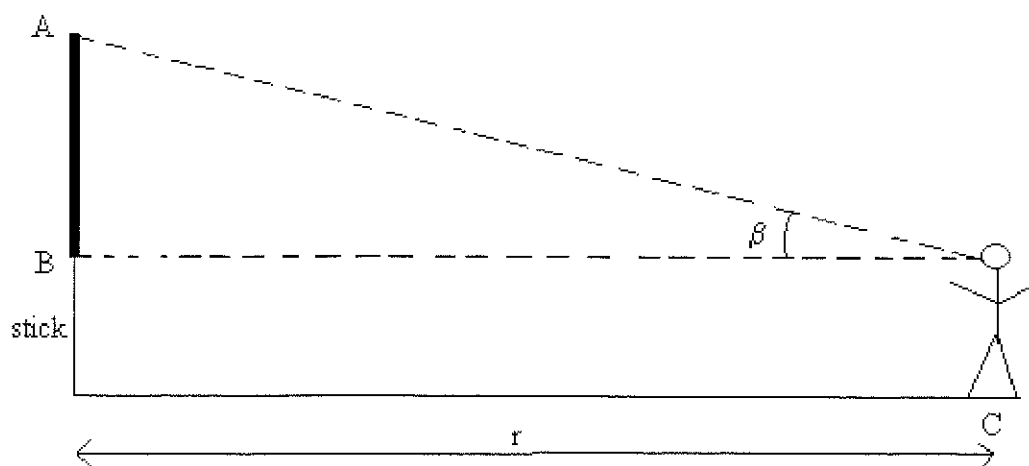


Fig. 5 Si aumenta la distancia r el ángulo β disminuye

Si los estudiantes conocen la definición de tangente, la apreciación anterior se puede cuantificar. La distancia **AB** sobre el palo es bien conocida y el ángulo β lo han medido usando el cuadrante, entonces por definición,

$$r = \frac{AB}{\tan \beta} \quad (1)$$

En el caso que los ángulos sean muy pequeños, se puede sustituir la tangente por el mismo ángulo expresado en radianes y la expresión que aparece es muy similar a la definición de paralaje horizontal.

Definición de Paralaje Horizontal

Por definición el paralaje del Sol es el ángulo β que se muestra en la figura 6. Aplicando la definición de tangente, $\tan \beta = R/r$, pero como el ángulo es muy pequeño, la tangente puede ser aproximada por el propio ángulo en radianes.

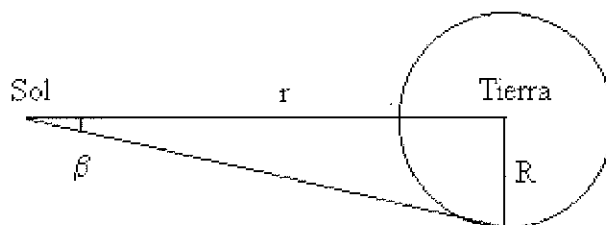


Fig. 6 El ángulo β es el paralaje solar: ángulo bajo el cual se ve R desde el Sol

En consecuencia

$$r = \frac{R}{\beta} \quad (2)$$

donde **R** es el radio terrestre y **r** es la distancia Tierra-Sol que se puede calcular usando ésta definición.

Para introducir el concepto de paralaje es conveniente realizar la experiencia 1. En esta actividad el estudiante, el observador, está situado en el vértice del ángulo β . Si comparamos la experiencia con la definición, el estudiante debería estar situado en el Sol. Por supuesto las observaciones que se realizan del tránsito de Venus no se dan en estas circunstancias. Los observadores estarán situados en diferentes puntos de la superficie terrestre y estarán mirando desde la Tierra el Sol. La situación de cada uno de los observadores será más análoga a la de cada uno de los "ojos" en la experiencia 2 que se propone a continuación.

Experiencia 2: Observaciones del Paralaje respecto a una referencia

Se puede comprobar que el paralaje decrece con la distancia considerando el fondo de referencia.

Cuando al extender el brazo ante uno mismo miras tu índice sólo con el ojo izquierdo, y después sólo con el ojo derecho, tu dedo se ve en distinto lugar respecto al fondo distante. Éste fenómeno es el paralaje, es el mismo que crea el relieve en nuestro cerebro cuando usa las diferentes imágenes procedentes de ambos ojos.

Se acerca el dedo hacia la nariz y miramos hacia un objeto cercano, alternativamente con sólo un ojo o el otro, y se observan las dos posiciones respecto al fondo. Seguidamente alejamos el dedo de la nariz, extendiendo el

brazo al máximo, y miramos de nuevo, primero con un sólo ojo, y después con el otro. En este último caso, el ángulo de variación de las dos posiciones del dedo es menor.

En consecuencia se observa que se verifica que: "al aumentar la distancia a que se encuentra el dedo, "el ángulo de paralaje decrece" . Se han tomado como referencia de esta observación los objetos de la habitación (figura 7).

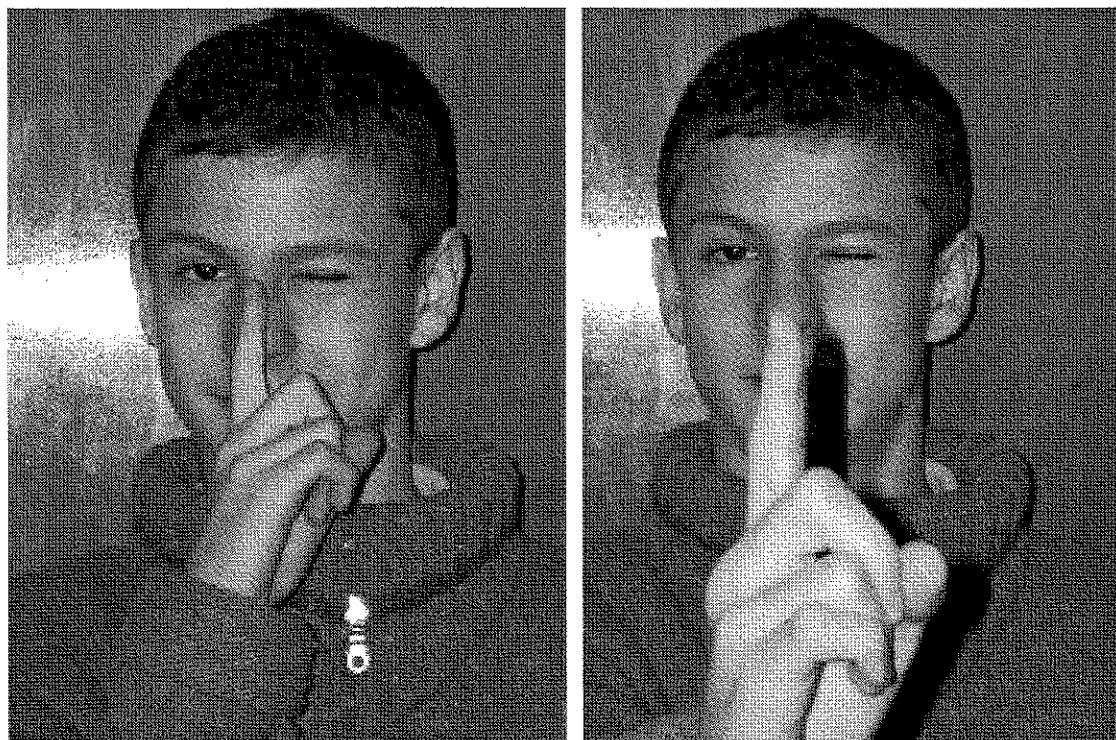


Fig. 7 Al aumentar la distancia a que se encuentra el dedo, éste se ve en distinto lugar respecto al fondo distante

EL TRÁNSITO PERMITE CALCULAR DISTANCIAS

Consideremos dos observadores situados en lugares **A** y **B** del mismo meridiano terrestre (para simplificar la geometría del problema), pero con distintas latitudes. Venus se ve como un punto (o pequeño disco) sobre el disco solar (figura 1) en dos posiciones diferentes **A'** y **B'**, debido a que las visuales desde **A** y **B** hacia Venus no son idénticas.

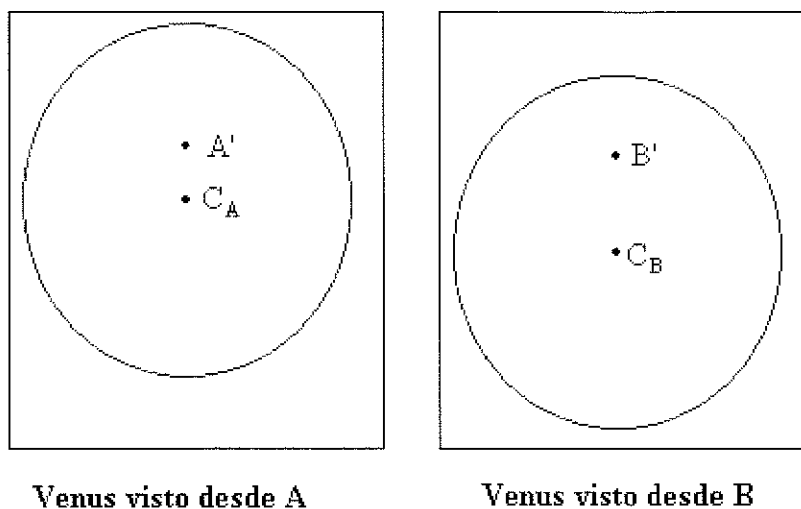


Fig. 8 Las dos observaciones realizadas por separado desde A y B

Si comparamos las dos observaciones conjuntamente (figura 8) es posible medir el desplazamiento, el paralaje. Al superponer ambas imágenes (figura 9) la distancia **A'B'** corresponde a la distancia entre las dos posiciones de Venus observadas simultáneamente desde **A** y **B**.

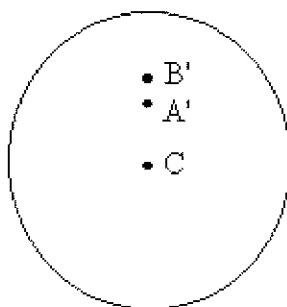


Fig. 9 Las dos observaciones superpuestas

Si se observa el movimiento de Venus durante el tránsito completo, se puede dibujar la línea de sus posiciones durante toda la observación (figura 10). Si observamos desde los puntos **A** y **B** se obtienen dos líneas paralelas (figura

11), una para cada lugar. La distancia entre ambas líneas es el desplazamiento del paralaje $\Delta\beta$, que en cada instante corresponde a la distancia $A'B'$.

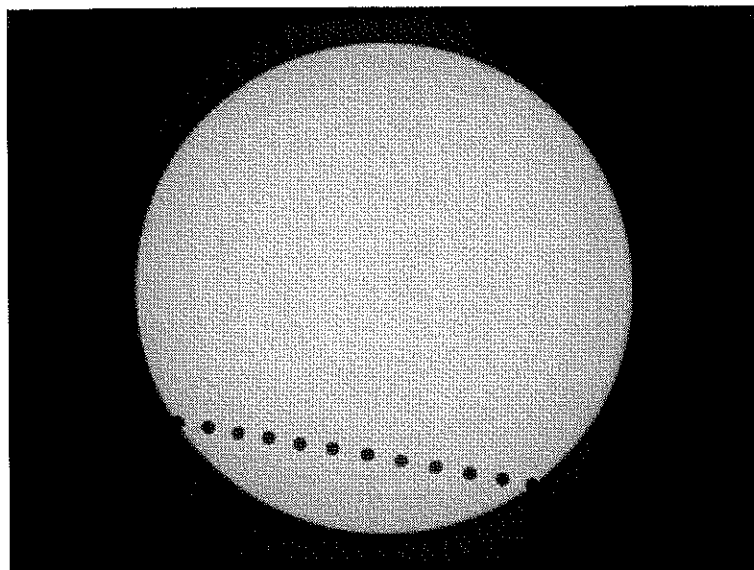


Fig. 10 Observaciones del tránsito de Venus del 2004

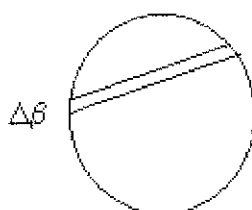


Fig. 11 $\Delta\beta$, distancia entre las dos trayectorias observadas de Venus desde A y B

El tránsito de Venus sirve para determinar la distancia Tierra-Sol porque la observación de la trayectoria de Venus al cruzar el disco solar permite deducir el paralaje del Sol. Como la distancia entre los dos lugares de observación, AB , es conocida, se puede deducir la distancia r_e de la Tierra al Sol usando la definición de paralaje (2)

$$r_e = \frac{AB}{\beta_s} \quad (3)$$

EL PROBLEMA GEOMÉTRICO: DISTANCIA TIERRA-SOL

Consideremos el plano definido por los tres puntos: O el centro de la Tierra, C el centro del Sol y V el centro de Venus. Consideramos los observadores en este mismo plano sobre un meridiano común: el de los puntos A y B de acuerdo con las hipótesis iniciales formuladas (figura 12).

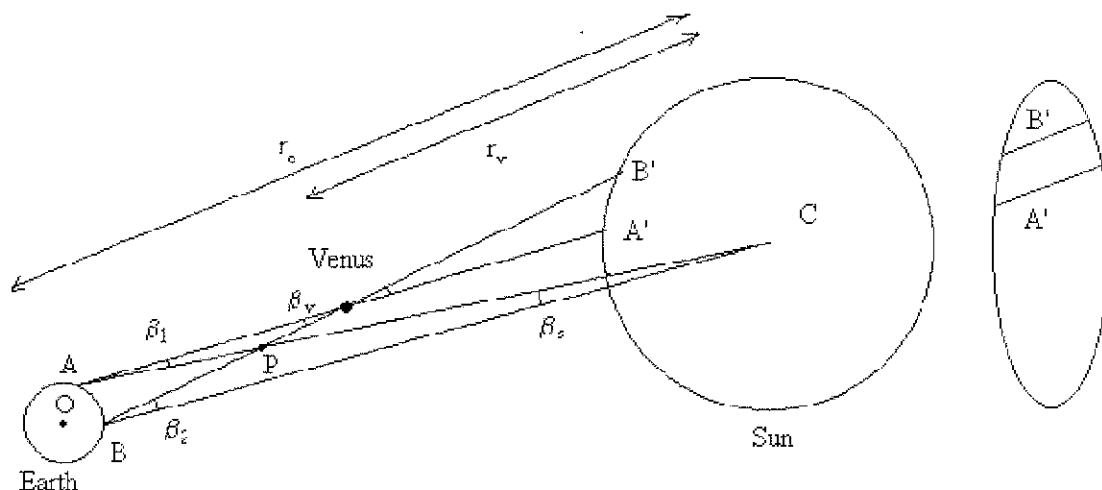


Fig. 12 Posición relativa de Venus, el Sol y los observadores terrestres, donde β_s y β_v son los paralajes del Sol y Venus respectivamente. El ángulo entre A' y B' es $\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta$

Los triángulos **APV** y **BPC** tienen iguales los ángulos externos en **P**, en consecuencia como la suma de los ángulos de un triángulo debe ser 180° , se cumple,

$$\beta_v + \beta_1 = \beta_s + \beta_2 \quad (4)$$

Se introduce el ángulo $\Delta\beta$ que mide la distancia entre las diferentes posiciones de la trayectoria de Venus sobre el diámetro solar (en cada instante equivale a **A'B'**).

$$\beta_v - \beta_s = \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta \quad (5)$$

Se reordena la última ecuación (5),

$$\Delta\beta = \beta_s \left(\frac{\beta_v}{\beta_s} - 1 \right) \quad (6)$$

Según la definición de paralaje, el paralaje de Venus es $\beta_v = \mathbf{AB}/(\mathbf{r_e}-\mathbf{r_v})$ y el paralaje solar es $\beta_s = \mathbf{AB}/\mathbf{r_e}$, por lo tanto el cociente $\beta_v / \beta_s = \mathbf{r_e} / (\mathbf{r_e}-\mathbf{r_v})$ substituido en la ecuación anterior (6) da lugar a,

$$\Delta\beta = \beta_s \left(\frac{r_e}{r_e - r_v} - 1 \right) = \beta_s \frac{r_v}{r_e - r_v} \quad (7)$$

En particular el paralaje solar β_s queda de la forma,

$$\beta_s = \Delta\beta \left(\frac{r_e}{r_v} - 1 \right) \quad (8)$$

donde $\Delta\beta$ es la distancia entre las dos líneas de la trayectoria de Venus vista desde las distintos puntos de observación.

Para calcular la razón r_v/r_e se puede considerar la tercera ley de Kepler. Así el cubo del mencionado cociente debe ser proporcional al cuadrado del cociente de los periodos de revolución. Como el periodo de revolución de Venus y de la Tierra son conocidos, 224.7 y 365.25 días respectivamente,

$$(r_e/r_v)^3 = (365.25/224.7)^2 \quad (9)$$

por lo tanto

$$r_e/r_v = 1.38248 \quad (10)$$

Este valor es substituido en la fórmula (8). El paralaje solar verifica,

$$\beta_s = 0.38248 \Delta\beta \quad (11)$$

Finalmente usando (3), la distancia de la Tierra al Sol r_e es,

$$r_e = \frac{AB}{\beta_s} \quad (12)$$

En consecuencia basta hallar la distancia **AB** a partir de la localización de los observadores y medir $\Delta\beta$ a partir de las observaciones del tránsito

DISTANCIA ENTRE LOS DOS OBSERVADORES

En las hipótesis consideradas en que los dos lugares de observación están sobre el mismo meridiano, la distancia **AB** se puede deducir a partir de las latitudes de los dos lugares de observación (figura 13). En el diagrama, φ_1 y φ_2 son las latitudes de los puntos **A** y **B**, y **R** es el radio de la Tierra. En el triángulo rectángulo que divide el triángulo isósceles **RAB** se deduce,

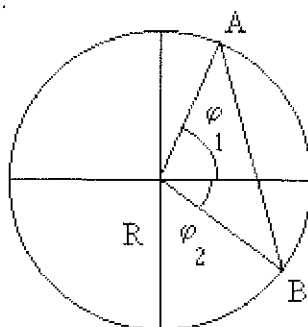


Fig. 13 La distancia entre A y B calculada a partir de sus latitudes

$$\sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \frac{AB/2}{R} \quad (13)$$

En consecuencia la distancia **AB** verifica,

$$AB = 2R \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (14)$$

Si los dos lugares de observación están situados en el mismo hemisferio, el ángulo a considerar es $(\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Es evidente que si **A** y **B** no están sobre el mismo meridiano el problema se complica mucho más; por este motivo, en su momento, cuando se llevó a cabo la primera determinación de la distancia Tierra-Sol, se seleccionaron lugares de observación con igual longitud para poder efectuar los cálculos de la forma más simplificada posible.

DISTANCIA ENTRE LAS DOS TRAYECTORIAS OBSERVADAS

Para calcular $\Delta\beta$ es necesario disponer de los datos de observación desde sendos lugares **A** y **B** del mismo meridiano. En este caso usaremos dibujos de la trayectoria de Venus realizados desde las diferentes localizaciones, todas sobre el mismo meridiano. A continuación ofrecemos dos métodos diferentes para determinar $\Delta\beta$

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida directa

Medimos **D**, el diámetro del Sol y la distancia entre las dos trayectorias de Venus $\Delta\beta$ (figura 11) y que consideramos equivale a **A'B'** sobre la figura 14. El diámetro angular del Sol es de 30' (minutos de arco). Por una simple proporción, la distancia entre las observaciones de Venus en diámetros solares es,

$$\frac{\Delta\beta}{30} = \frac{A'B'}{D} \quad (15)$$

donde hay que expresar el diámetro angular del Sol en radianes,

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{360} \frac{A'B'}{D} \quad (16)$$

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida de las cuerdas

La distancia $\Delta\beta$ entre las dos trayectorias, o bien **A'B'**, es difícil de medir porque las dos líneas están siempre muy próximas entre sí en comparación con el diámetro del Sol. Por ese motivo se va a reemplazar tomar la medida de **A'B'** (figura 14) por la medida de las cuerdas **A₁A₂** y **B₁B₂**.

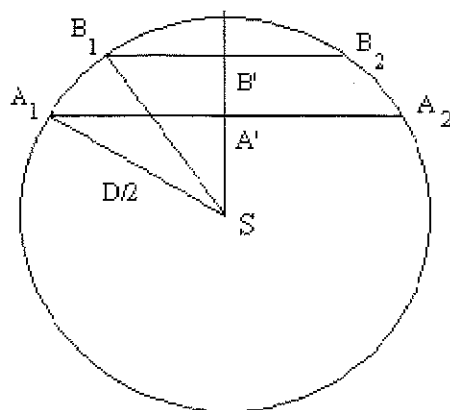


Fig. 14 $\Delta\beta$, distancia entre las dos trayectorias observadas de Venus equivale a **A'B'**

Usando el teorema de Pitágoras en la figura 14, se deducen las expresiones siguientes,

$$\begin{aligned} B'S &= \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - B_1 B_2^2} \\ A'S &= \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - A_1 A_2^2} \end{aligned} \quad (17) \text{ y } (18)$$

Para calcular **A'B'** basta obtener la diferencia **B'S - A'S**

$$A'B' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{D^2 - B_1 B_2^2} - \sqrt{D^2 - A_1 A_2^2} \right) \quad (19)$$

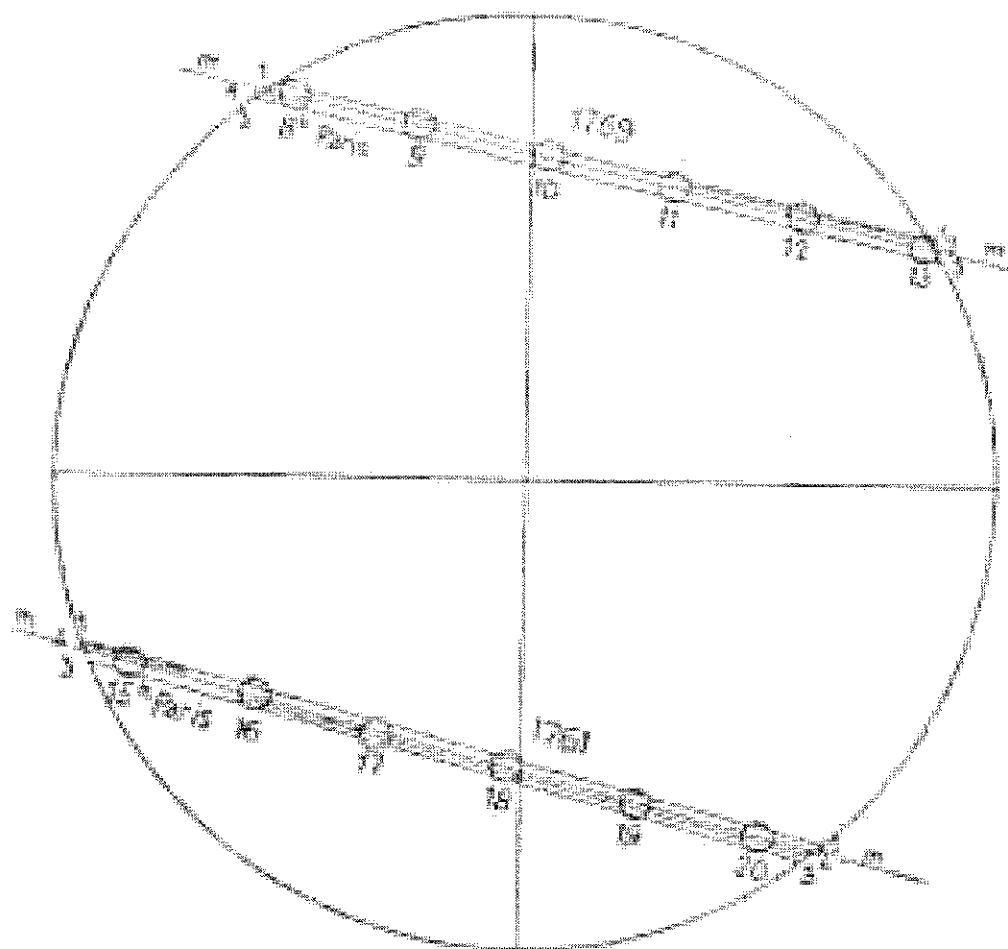
Dividiendo por el diámetro **D**, resulta la expresión

$$\frac{A'B'}{D} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - (B_1 B_2 / D)^2} - \sqrt{1 - (A_1 A_2 / D)^2} \right) \quad (20)$$

que servirá para realizar los cálculos con más precisión que la medida directa de la distancia entre las dos trayectorias observadas de Venus sobre el Sol.

RESULTADOS CONSEGUIDOS USANDO LAS OBSERVACIONES DE 1769

Los datos que a continuación se utilizan corresponden a los resultados de la expedición de 1769. El dibujo y la tabla que resumen estas observaciones fueron publicados en "A History of Astronomy" de A. Pannekoek. En particular se van a considerar los valores obtenidos en Vardö (línea 3) y Papeete (línea 1) para hacer los cálculos. Midiendo $\Delta\beta$ ó, A_1A_2 , B_1B_2 y D de la figura 15.



Transit of Venus across the solar disc
 m-track of the planet by its central point

1761:	1. Rodriguez	2. Paris	3. Tobolsk	4. Tahiti
1769:	1. Tahiti	2. Batavia	3. Vardö	4. Paris

Fig. 15 Trayectorias de Venus observadas en 1761 y 1769 desde diversos lugares de observación

Distancia entre los observadores situados en A y B

Vardö (Laponia) y Papeete (Tahiti) están sobre el mismo meridiano (figura 16) y sus latitudes respectivas son $70^{\circ} 21' N$ y $17^{\circ} 32' S$. Hay que mencionar que cuando se realizó la observación del tránsito en Vardö se observaba el sol de medianoche. De acuerdo con la posición de ambas ciudades el ángulo entre ambas a considerar φ es,

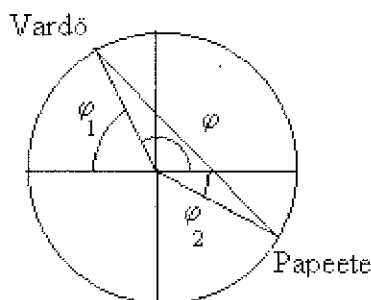


Fig. 16 Vardö y Papeete sobre el mismo meridiano

$$\varphi = (90 - \varphi_1) + 90 + \varphi_2 = 127^{\circ} 11' \quad (21)$$

y usando el radio terrestre $R = 6300$ km, se calcula

$$AB = 2R \sin(\varphi/2) = 11425 \text{ Km} \quad (22)$$

Distancia $\Delta\beta$ entre las dos trayectorias observadas de Venus

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida directa

Midiendo directamente la distancia entre las líneas 1 y 3, se obtiene $A'B' = 1.5$ mm siendo el diámetro solar $D = 70$ mm. Por lo tanto, usando (16)

$$\Delta\beta = 0.00019 \text{ radianes} \quad (23)$$

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida de las cuerdas

Midiendo A_1A_2 , B_1B_2 y D sobre la figura (15), se obtiene $A_1A_2 = 52$ mm (línea 1), $B_1B_2 = 49$ mm (línea 3) y $D = 70$ mm, entonces usando (20)

$$\frac{A'B'}{D} = \frac{\sqrt{1 - (49/70)^2} - \sqrt{1 - (52/70)^2}}{2} = 0.02235 \quad (24)$$

de donde $\Delta\beta$ viene dado por (16)

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{360} 0.02235 = 0.00020 \text{ radianes} \quad (25)$$

Cálculo de la distancia r_e Tierra-Sol (unidad astronómica de distancia)

Usando las fórmulas deducidas para la distancia $r_e = AB / \beta_s$ y para el paralaje solar (8 y 11) se deduce,

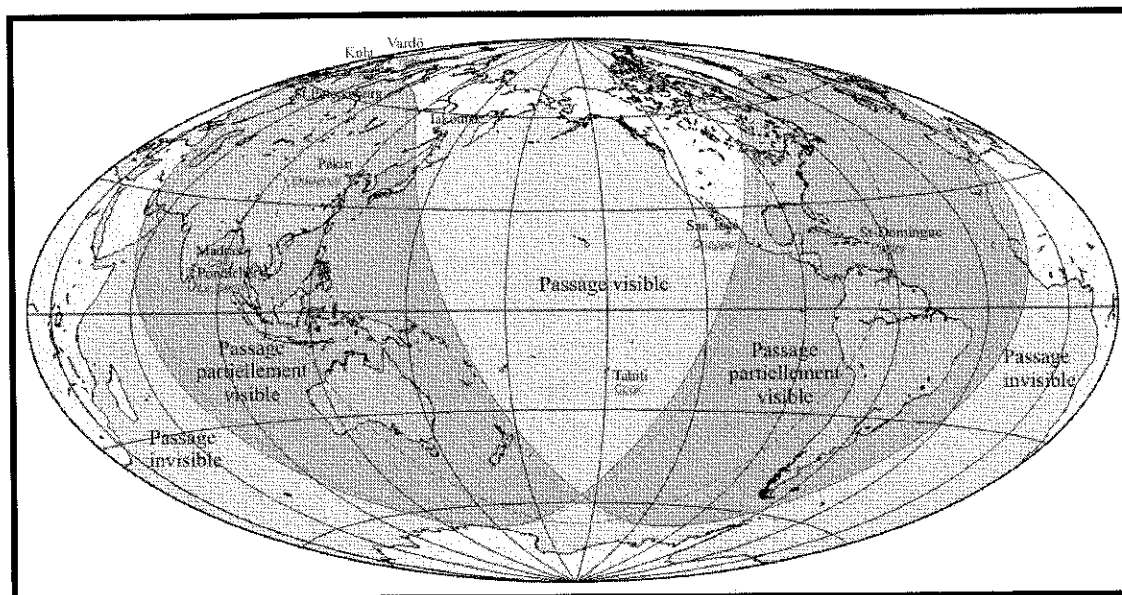
$$r_e = \frac{AB}{0.38248 \Delta\beta} \quad (26)$$

Introduciendo $\Delta\beta$ los datos obtenidos en 1769 y que la distancia $AB = 11425$ km se obtienen los dos valores diferentes de r_e que figuran en la tabla siguiente,

Método usado	$\Delta\beta$	r_e en millones de km
directa	0.00019	157
por cuerdas	0.00020	149

Tabla 2: Resultados obtenidos de la distancia Tierra-Sol, unidad astronómica de distancia, según los dos métodos descritos.

Se puede observar que los resultados obtenidos son razonables si se tienen en cuenta los métodos empleados. La distancia Tierra-Sol se toma actualmente como 149.6 millones de km, definición de unidad astronómica de distancia. Hay que mencionar que el segundo resultado obtenido en la tabla 2, usando el método de las cuerdas, introduce menos errores de medición que el método inicial porque se consigue más precisión midiendo las cuerdas que si se mide $\Delta\beta$ de forma directa.



RESULTADOS USANDO LAS OBSERVACIONES DE 2004

El ejercicio de cálculo propuesto en este artículo se puede repetir de nuevo usando las observaciones tomadas el 8 de Junio del 2004. Está claro que hay que contar con dos observadores situados sobre el mismo meridiano, para que el desarrollo matemático sea más sencillo, y cuya latitud difiera lo más posible para reducir al máximo los errores. Es evidente que no es fácil encontrar dos escuelas situadas sobre el mismo meridiano, suficientemente alejadas para realizar las observaciones y que estén interesadas en participar de forma conjunta en la observación. A continuación presentamos las observaciones realizadas en Málaga y Brest.

En Málaga la observación fue realizada por los alumnos del Instituto de Enseñanza Secundaria "Antonio Gala" de Alhaurin el Grande (Málaga), con la ayuda de la Sociedad Malagueña de Astronomía. Los estudiantes se desplazaron hasta la céntrica plaza de la Marina en Málaga. Por parte de Brest, el centro de Enseñanza Secundaria que realizó la observación fue el Collège-Lycée Saint Sébastien con la ayuda de la agrupación astronómica "Astroclub Alnitak" de Landernau (Brest) que se encuentra aproximadamente en el mismo meridiano que Málaga. Para hacer los cálculos se toman las medidas $\Delta\beta$ ó, A_1A_2 , B_1B_2 y D de la figura 17.

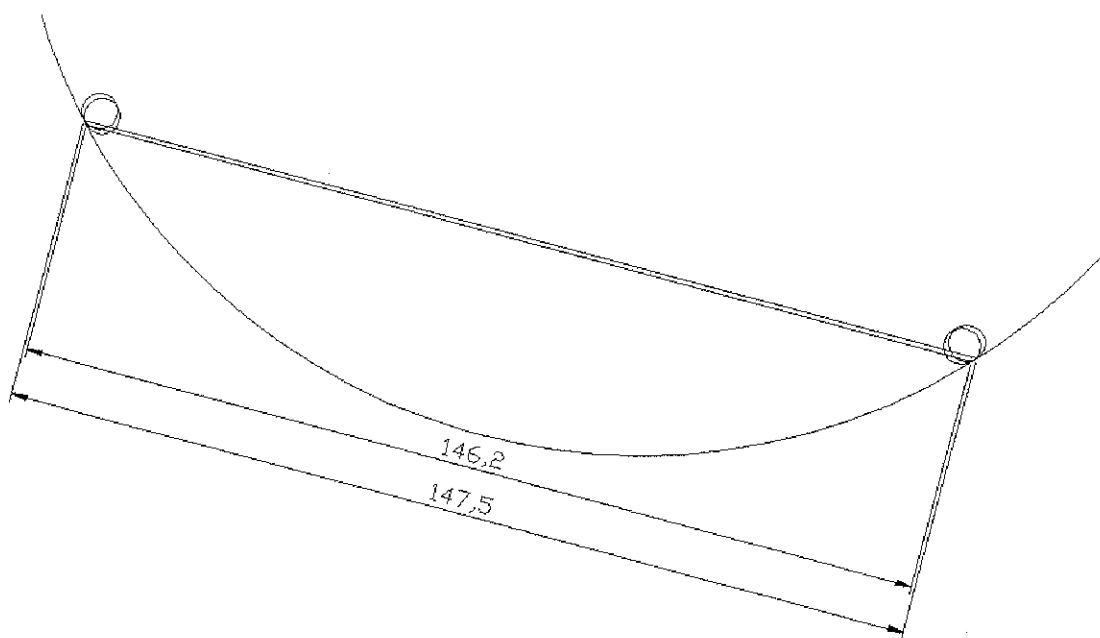


Fig. 17 Trayectorias de Venus observadas en 2004 desde Málaga y Brest.

Distancia entre los observadores situados en A y B

Landernau (Brest) y Málaga tienen aproximadamente la misma longitud (figura 18). Sus latitudes respectivas son $48^{\circ} 24' \text{ N}$ y $36^{\circ} 43' \text{ N}$. Al estar ambos lugares de observación en el mismo hemisferio, el ángulo entre ambos es φ ,

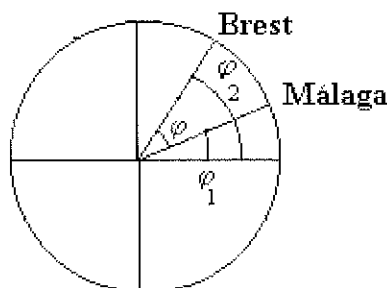


Fig. 18 Brest y Málaga sobre el mismo meridiano

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 11^{\circ}41' \quad (27)$$

y usando el radio terrestre $R = 6300 \text{ km}$, se calcula

$$AB = 2R \sin(\varphi/2) = 1282 \text{ Km} \quad (28)$$

Distancia $\Delta\beta$ entre las dos trayectorias observadas de Venus

Dado que la distancia entre los dos puntos de observación es muy pequeña para realizar esta experiencia, las dos trayectorias están muy próximas. Por ese motivo, para evitar perder mucha más precisión se han considerado dibujos mucho mayores que en el caso anterior para poder tomar las medidas algo mejor.

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida directa

Midiendo directamente la distancia entre las líneas 1 y 3, se obtiene $A'B' = 0.75 \text{ cm}$ siendo el diámetro solar $D = 200 \text{ cm}$. Por lo tanto, usando (16)

$$\Delta\beta = 0.00003 \text{ radianes} \quad (29)$$

Cálculo de $\Delta\beta$ por medida de las cuerdas

Midiendo A_1A_2 , B_1B_2 y D sobre la figura (17), se obtiene $A_1A_2 = 146.5 \text{ cm}$, $B_1B_2 = 147.5 \text{ cm}$ y $D = 200 \text{ cm}$, entonces usando (20)

$$\frac{A'B'}{D} = \frac{\sqrt{1 - (146.5/200)^2} - \sqrt{1 - (147.5/200)^2}}{2} = 0.00271 \quad (30)$$

de donde $\Delta\beta$ viene dado por (16)

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{360} 0.00271 = 0.00002 \text{ radianes} \quad (31)$$

Cálculo de la distancia r_e Tierra-Sol (unidad astronómica de distancia)

Usando las fórmulas deducidas para la distancia $r_e = AB / \beta_s$ y para el paralaje solar (8 y 11) se deduce,

$$r_e = \frac{AB}{0.38248 \Delta\beta} \quad (32)$$

Introduciendo $\Delta\beta$ los datos obtenidos en 2004 y que la distancia $AB = 1282$ km se obtienen los dos valores diferentes de r_e que figuran en la tabla siguiente,

Método usado	$\Delta\beta$	r_e en millones de km
directa	0.00003	114
por cuerdas	0.00002	142

Tabla 2: Resultados obtenidos de la distancia Tierra-Sol, unidad astronómica de distancia, según los dos métodos descritos.

El resultado es aceptable si tenemos en cuenta la reducida distancia entre los puntos de observación y las simplificaciones realizadas. Además las dos ciudades no están exactamente sobre el mismo meridiano, lo que introduce más errores que no han sido considerados. Las longitudes de Landernau y Málaga son $4^\circ 30' W$ y $4^\circ 25'$ respectivamente.



MÉTODO MUY SIMPLIFICADO CÁLCULO DE LA UNIDAD ASTRONÓMICA DE DISTANCIA EN 4 PASOS

Para aquellos estudiantes que no hayan visto nunca trigonometría presentamos a continuación un método muy sencillo para calcular la unidad astronómica de distancia a partir de las observaciones del tránsito de Venus. En este caso se evitan muchos de los conceptos necesarios desde un punto de vista astronómico, pero a pesar de ello la actividad puede ser interesante aunque sólo sea como mera aproximación, para los alumnos más jóvenes, al problema de la determinación de la distancia de la Tierra al Sol usando un tránsito de Venus. Es extremadamente importante que los alumnos puedan entender la idea principal que subyace en el proceso, dejando los detalles mas técnicos para los profesionales. Por ejemplo, en esta presentación se evita introducir el concepto de paralaje. Los estudiantes sólo precisan conocer la longitud de la circunferencia, manejar proporciones y la tercera ley de Kepler.

Paso 1: Relación entre la unidad astronómica y el diámetro solar

Supongamos que el Sol describe en su movimiento en torno a la Tierra una circunferencia de radio a , la unidad astronómica de distancia. El diámetro angular del Sol es aproximadamente 0.5 grados y la circunferencia completa corresponde a 360°. Consideramos la razón entre la longitud de esta circunferencia y 360°, así como es el diámetro del Sol a 0.5°. Si llamamos D al diámetro real del Sol,

$$\frac{D}{0.5} = \frac{2 \pi a}{360}$$

de donde la unidad astronómica a se puede obtener fácilmente si se conoce el diámetro del Sol D , ya que

$$a = \frac{360 D}{\pi} \quad (33)$$

Así pues vamos a determinar el diámetro D a partir de las observaciones del tránsito de Venus.

Paso 2: Cálculo de distancias reales sobre la superficie solar

Consideramos la situación de la Tierra, el Sol y Venus durante el tránsito

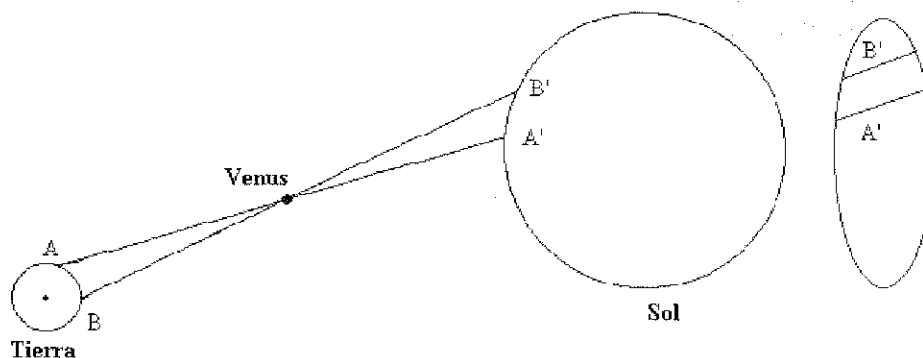


Fig. 19 Posiciones de la Tierra, el Sol y Venus durante el tránsito

Dibujamos de nuevo la situación anterior (Fig. 19) de una forma más simplificada que nos permita ver de forma clara la relación matemática que deseamos considerar.

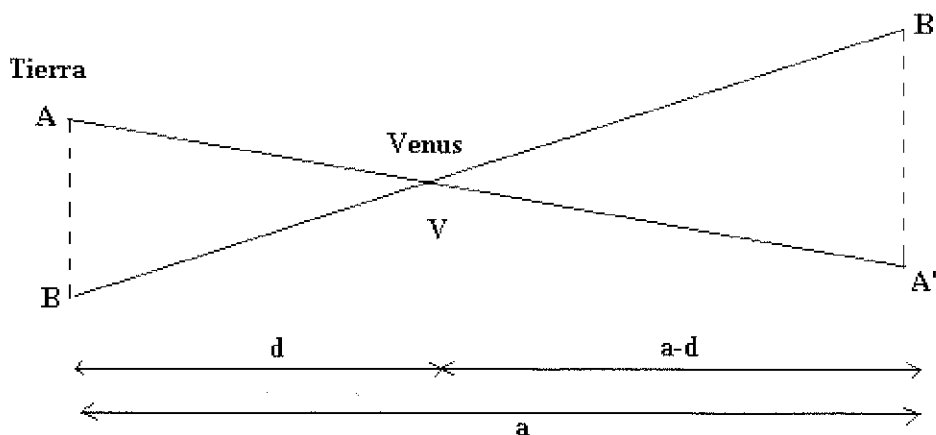


Fig. 20 Dibujo simplificado de las posiciones de la Tierra, el Sol y Venus durante el tránsito

Se consideran los dos triángulos de la figura 20, si se observa el tránsito de Venus desde dos lugares A y B, situados en la superficie terrestre sobre el mismo meridiano (para simplificar los cálculos). En la figura 20, los triángulos **ABV** y **A'B'V** son semejantes, así podemos considerar la proporción (Teorema de Tales):

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{a-d}{d} \quad (34)$$

Conocemos el valor de la expresión $(a-d)/d$ a partir de la tercera ley de Kepler. Los periodos de revolución de Venus y la Tierra son 224.7 días y 365.25 días respectivamente. Por lo tanto $(a-d)^3/a^3 = (224.7)^2/(365.25)^2$ y es muy fácil deducir que $(a-d)/d = 2.61$. Introduciendo éste valor en la relación anterior (34), se deduce

$$A'B' = 2.61 AB \quad (35)$$

donde la distancia **AB**, entre los dos lugares **A** y **B** de la superficie terrestre, es bien conocida. Así podemos deducir la distancia real entre **A'** y **B'** sobre la superficie del Sol.

Paso 3: Cálculo del diámetro real del Sol

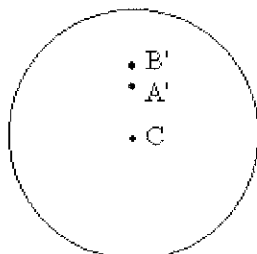


Fig. 21 Venus sobre el disco solar observado desde los lugares A y B.

Usaremos la observación realizada desde dos lugares diferentes de la Tierra. Si disponemos de una fotografía o dibujo como el de la figura 21 tomado durante la observación, sobre esta figura podemos medir el diámetro del Sol $\mathcal{D}$ y la distancia entre **A'** y **B'**, que hemos llamado $\mathcal{A'B'}$. Introducimos entonces la relación

$$\frac{A'B'}{\mathcal{A'B'}} = \frac{D}{\mathcal{D}}$$

(Notar que los valores $A'B'$ y D son los valores reales y los resultados medidos sobre la fotografía o el dibujo $\mathcal{A'B'}$ y $\mathcal{D}$). Con esta proporción calculamos el diámetro real del Sol, porque calculamos sobre la fotografía $\mathcal{A'B'}$ y $\mathcal{D}$ así como también sustituimos $A'B'$ determinado anteriormente en (35).

$$D = 2.61 AB \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A'B'}}$$

Paso 4: Fórmula final para determinar la unidad astronómica a

Introduciendo el valor de D en la primera expresión (33), obtenemos la distancia Tierra-Sol:

$$a = \frac{939.6 AB}{\pi} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A'B'}}$$

donde también usamos $\mathcal{A'B'}$ y $\mathcal{D}$ conseguidas a partir de la fotografía, y la distancia AB entre los dos lugares de observación. Hay que destacar que la distancia considerada AB no es sobre la superficie terrestre, sino que es en línea recta, como se puede observar en las figuras 19 y 20.

TRÁNSITOS DE PLANETAS ESTRASOLARES

Uno de los campos actuales de investigación en astronomía es la detección de planetas extra solares. Existen diversos métodos para localizarlos, pero uno de ellos consiste en el estudio de los cambios de luminosidad de la estrella en torno a la que giran, es decir en el estudio de los tránsitos de los planetas que se quieren detectar por delante de las estrellas.

Un planeta puede temporalmente oscurecer la estrella alrededor de la cual orbita (eclipsar). Se puede observar un pequeño cambio de luminosidad de la estrella durante el tránsito del planeta. El descenso de luminosidad es del 1% para un planeta gigante como Júpiter y del 0,01% para un planeta del tamaño de la Tierra. Una desventaja de este método es que la órbita del planeta debe estar correctamente orientada para producir un eclipse visible desde la Tierra. Esta probabilidad es aproximadamente del 0.5% para un planeta situado a una U.A. desde su estrella. En otras palabras, si todas las estrellas tienen un planeta a una U.A., es necesario seguir 200 de ellas para ver un eclipse. Si el 10% de las estrellas tienen un planeta a una U.A., para detectar 10, deberían ser seguidas fotométricamente unas 20000 estrellas.

El telescopio espacial Hubble Space Telescope observó que HD 209458b produce un eclipse cada cuatro días. Las observaciones espectroscópicas durante el eclipse por este planeta ya han ofrecido indicaciones acerca de la composición química de su atmósfera. Es necesario mencionar también que el planeta OGLE-TR-56 B, el cual fue detectado por este método, tiene eclipses cada 30 horas, lo que implica, si la interpretación de las observaciones es correcta, una órbita muy pequeña (cinco veces el radio del Sol). Todos estos planetas son planetas gigantes y no son capaces de albergar formas de vida similares a la vida terrestre.

En la actualidad algunos grupos de astrónomos amateurs ya están empezando a trabajar en la detección de estos planetas a base de estudiar sus tránsitos y se espera que en un futuro próximo sea un campo de gran actividad.

La detección de planetas extra solares se hace actualmente de cuatro formas diferentes, pero el interés que tiene el estudio de los tránsitos es que ofrece la oportunidad de determinar la presencia de planetas de tamaño y distancia a su estrella similar a la situación de la Tierra respecto al Sol, y este tipo de planetas tienen un especial interés en la búsqueda de vida en el universo.

BIBLIOGRAFIA

- Berthomieu, F., Dahringer, F., Gerbaldi, M., Gaitzch, R., Pickwick, A., Ros, R.M., *How to measure the Earth-Sun distance by studying the Transit of Venus*, Proceedings of 7th EAAE International Summer School, UNIFF, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, 2003.
- Pannekoek, A., *A History of Astronomy*, Dover Publications Inc, New York.
- Ros, R.M., *El tránsito de Venus para determinar la unidad astronómica de distancia*, Revista Española de Física, 18, 3, 7, 11, Madrid, 2004.
- Ros, R.M., *El tránsito de Venus del 8 de Junio de 2004*, La Gaceta de la RSME, 7, 1, 261, 280, Madrid, 2004.
- <http://www.fecyt.es/cienciaenaccion>
- <http://www.vt-2004.org>



ApEA, la Asociación para la Enseñanza de la Astronomía, nació en 1995 para acoger a todas las personas que se dedican a la enseñanza de la Astronomía en centros educativos, planetarios, museos de la ciencia, agrupaciones de aficionados y clubes de estudiantes.

ApEA engloba a todos los interesados en la enseñanza de todos los niveles educativos reglados -desde la enseñanza primaria hasta la universitaria- así como los no reglados. También organiza reuniones de formación para sus socios y publica materiales de interés didáctico, como la presente colección.

Más información en www.apea.es

