ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA: Aplicando las leyes de la Física

Ricardo Moreno Luquero

En Secundaria se estudian las órbitas de los satélites como aplicación de la ley de Gravitación Universal y de las leyes de conservación de la energía y del momento cinético. En este artículo además de resumir las ideas básicas para trabajar con órbitas, aporto ejemplos numéricos reales que pueden ayudar a los profesores. Quisiera evitar errores como el de un alumno que puso en un examen: "como las órbitas más altas corresponden a velocidades menores, un satélite en órbita circular, al frenar, asciende".

Las fórmulas que he usado para obtener los datos están al final del artículo, para no asustar. Cualitativamente se podrían resumir en estas cuatro ideas:

1ª idea: Si un satélite está en órbita circular alrededor de la Tierra, su velocidad sólo depende del radio de la órbita: cuanto mayor sea, más despacio va.

2ª idea: Un satélite en una órbita circular más alejada de la Tierra que otra, tiene menos energía cinética pero más energía potencial, y la energía total (cinética más potencial) es mayor.

Por esa razón, para pasar de una órbita circular baja a otra más alta, hay que aportar energía.

3ª idea: En una órbita elíptica, la velocidad y la altura del satélite varían en cada punto. Cuanto más cerca de la Tierra, más deprisa va.

4ª idea: El tiempo que un satélite tarda en dar una vuelta a la Tierra (el periodo) es mayor cuanto mayor es el eje mayor de la elipse.

EFECTOS DE UN CAMBIO DE VELOCIDAD EN UNA ÓRBITA CIRCULAR

Supongamos (Fig. 1) un satélite que gire alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura[1] de 5000 km: el radio de la órbita sería de 11.400 km: esa altura más el radio de la Tierra, 6400 km. Según las fórmulas, su velocidad será de 5,9 km/s y su periodo T= 3,4 h:

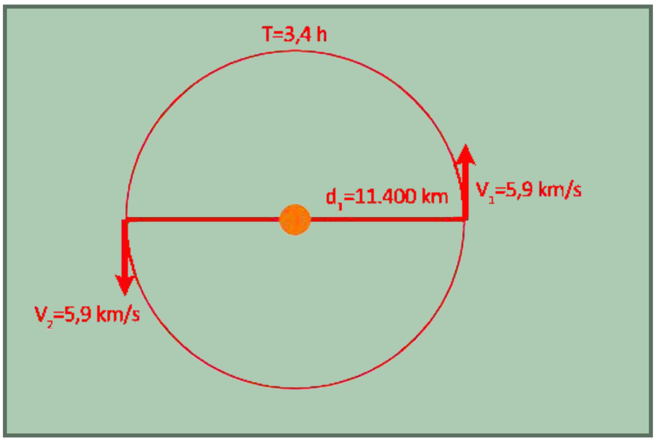

Fig 1. Órbita circular de un satélite
(el radio de la Tierra no está a escala)

Ahora supongamos (Fig. 2) que en el punto de la derecha el satélite aumenta de forma prácticamente instantánea su velocidad hasta los 6,8 km/s: la órbita pasa a ser una elipse (azul), con la Tierra en un foco. Según avanza, el satélite asciende a mayor altura sobre la Tierra y a la vez va disminuyendo su velocidad, hasta llegar a 3,5 km/s en el extremo izquierdo, el más alejado de la Tierra (d_2=22.300 km). Y regresa de nuevo al punto inicial, donde volverá a tener 6,8 km/s. Curiosamente, aunque haya acelerado inicialmente, como el semieje mayor de la elipse ha aumentado, el tiempo que tarda en dar una vuelta completa (T=6,1 h) es mayor que en el caso anterior (T=3,4 h).

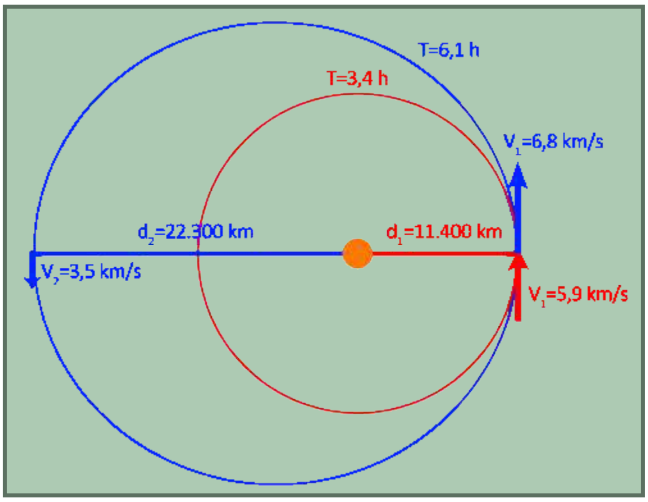

Fig. 2 Al aumentar el satélite su velocidad, tarda más en dar una vuelta

Volvamos a la situación inicial (Fig. 3) de órbita circular a 5,9 km/s (en rojo), y frenemos rápidamente hasta 5,1 km/s: el satélite cae en

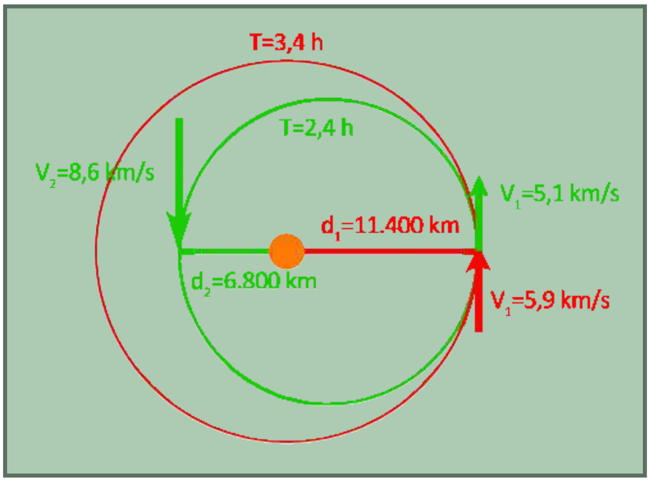

Fig. 3 Al frenar, el satélite tarda menos en dar una vuelta

una órbita elíptica (en verde) con un foco en la Tierra, va acelerando hasta llegar a 8,6 km/s cuando está más cerca de la Tierra (d_2= 6.800 km), y en la otra mitad de la órbita va frenando hasta llegar de nuevo a los 5,1 km/s en el punto inicial. Como el semieje mayor de la elipse es más pequeño, tarda menos en dar una vuelta completa (T=2,4 h) en la órbita elíptica que en la circular (T=3,4 h).

[1] Hemos utilizado una altura intermedia, para que tanto al acelerar como al frenar, las órbitas sean elipses que se puedan observar como tales en un dibujo a escala.

ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA

Si un satélite está en una órbita circular, y quiere pasar a otra también circular pero más baja, no puede hacerlo frenando sin más. Debe hacerlo en dos veces, con alguna maniobra de transición, por ejemplo, a través de una órbita elíptica llamada órbita de Hohmann.

Siguiendo con los ejemplos de antes, supongamos que tenemos (Fig.4) un satélite en una órbita circular de d_1=11.400 km (en rojo), por

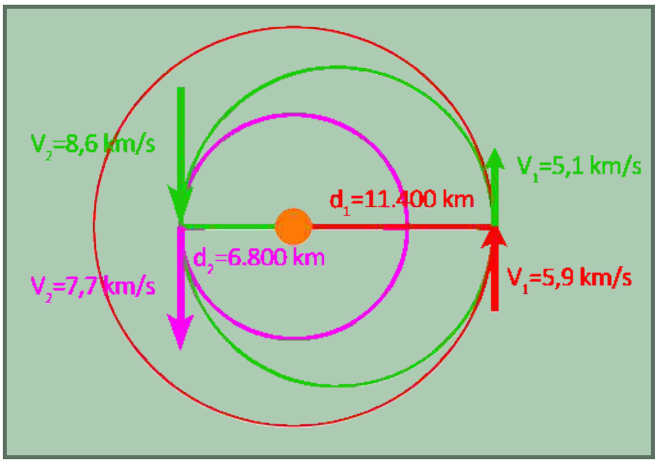

Fig. 4 Para pasar de una órbita circular a otra más baja, se necesitan dos frenadas

lo que va a una velocidad de v= 5,9 km/s, y que quiere bajar a una órbita de d_2=6.800 km (en violeta). Debería frenar y ponerse a 5,1 km/s, con lo que entra en una órbita elíptica (en verde) que le lleva en el otro extremo (perigeo) al radio buscado. Pero llega con una v= 8,6 km/s, y debe frenar de nuevo hasta los 7,7 km/s de la órbita circular (violeta) deseada.

Otro ejemplo, supongamos el mismo satélite en su órbita circular inicial, de d_1= 11.400 km y v= 5,9 km/s (en rojo en la Fig. 5), que quiere pasar a otra más alta circular (naranja) de d_2=22.300 km. Primero debe acelerar hasta v= 6,8 km/s, con lo que entra en una órbita elíptica (azul) que le lleva en el extremo opuesto (apogeo) al radio deseado. Pero como llega con una velocidad de 3,5 km/s, debe acelerar de nuevo hasta los 4,2 km/s que corresponden a la órbita circular (naranja) de radio 22.300 km.

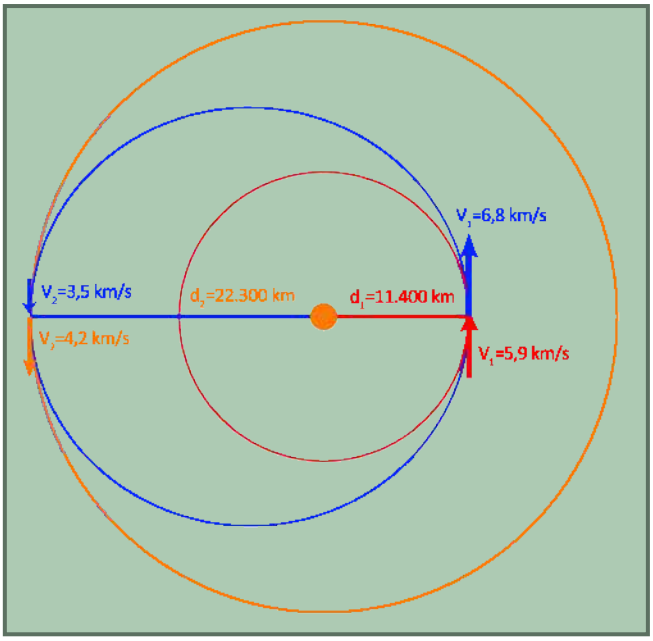

Fig. 5 Para subir a una órbita más alta, hay que acelerar dos veces

ÓRBITAS GEOESTACIONARIAS

La órbita circular con un periodo de 24 h igual al de la Tierra, se llama geoestacionaria, y corresponde a un radio de 42.300 km.

Fig. 6 El satélite de comunicaciones español Hispasat, en una órbita geoestacionaria

Para llevar hasta allí a un satélite (Fig. 7), primero se le coloca en una órbita circular baja (rosa), por ejemplo, a 400 km de altura sobre la superficie terrestre (d_1=6.800 km, suponiendo que el radio de la Tierra es 6.400 km), para lo cual se necesita que vaya a 7,7 km/s. Se le da un incremento de velocidad de 2,4 km/s para llegar a v= 10,1 km/s, con lo que llega en una órbita elíptica (azul) a un apogeo de d_2=42.300 km

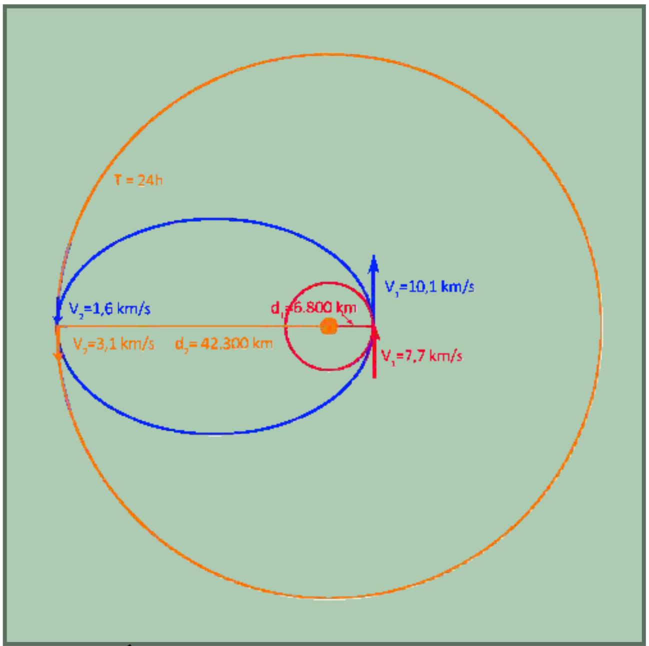

Fig. 7 Órbita de transferencia para colocar un satélite en órbita geoestacionaria

(la altura sobre la superficie terrestre es de casi 36.000 km). Allí llega con una v= 1,6 km/s y debe ser acelerado hasta los 3,1 km/s, que es la velocidad que corresponde a una órbita circular (naranja) a esa altura. Esa órbita tiene un periodo de 24 h, es decir, el satélite da una vuelta en el mismo tiempo que lo hace la Tierra. Por esa razón siempre está encima del mismo punto del ecuador, y si está en la posición adecuada, es muy útil para las comunicaciones desde un país o para la observación de una zona de la Tierra.

VIAJE A LA LUNA

Las órbitas de transferencia se usaron en el histórico viaje del Apolo XI en 1969. Los astronautas llegaron a las inmediaciones de la Luna (Fig. 8) a una velocidad[2] de más de 2.500 m/s, y tuvieron que frenar hasta los 1.672 m/s que necesitaban para ponerse en el punto más bajo de una órbita elíptica (azul), que variaba entre los 111 km y los 315 km de altura sobre la superficie lunar. En ese mismo punto de su tercera órbita encendieron los motores durante 17 segundos para reducir ligeramente su velocidad hasta 1.630 m/s, con lo que se colocaron en una órbita circular (rojo) en la que tardaban 2 horas casi justas en dar una vuelta a la Luna. Al día siguiente, mientras Michael Collins se quedaba en esa órbita en el Módulo de Mando Columbia, Neil Armstrong y Edwin Aldrin entraron en el Módulo Lunar Eagle, se

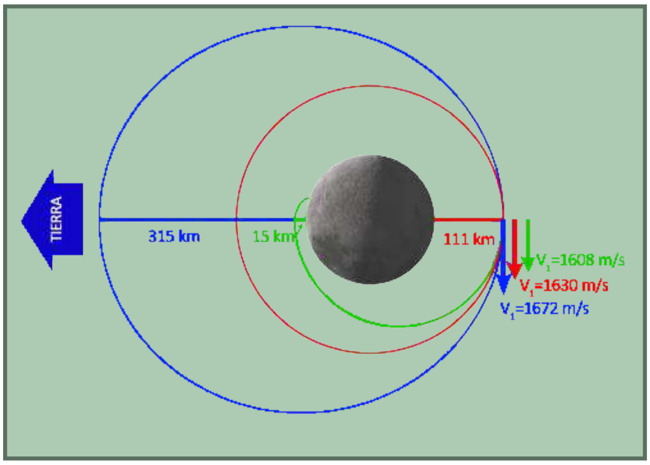

Fig. 8 Los cambios de órbitas se debían hacer siempre en la cara oculta (la Luna no está a escala)

separaron de la nave principal y frenaron con los cohetes hasta ponerse a 1.608 m/s. Con esto se colocaron en el punto más alejado de una órbita elíptica (verde) que les llevó en el otro extremo a sólo 15 km de la superficie de la Luna. En esa media circunvalación tardaron 57 minutos, y aumentaron su velocidad hasta los 1.697 m/s. A partir de ahí volvieron a encender el motor, dejaron la órbita y el descenso fue continuamente propulsado, frenando y recorriendo en doce minutos los 480 km que les separaban del punto de alunizaje.

Como aterrizaron en la cara visible de la Luna, los encendidos de los motores para cambiar de órbita se debían hacer siempre en la cara oculta (Fig. 8), cuando no tenían contacto por radio con la Tierra, lo que aumentaba el dramatismo de la operación.

2. En este caso se dan las velocidades en m/s, pues las variaciones son pequeñas. También se da el dato de la altura h sobre la superficie de la Luna, que es relevante en el texto. Los datos están tomados del artículo de Eduardo Gª Llama en Investigación y Ciencia, VII-2019.

Fig. 9 El módulo Eagle en su ascenso desde la superficie lunar

VIAJE A MARTE

Las órbitas de transferencia se usan también para viajar a otros planetas, por ejemplo, para ir desde la Tierra a Marte (Fig. 10). En ese caso el cuerpo central es el Sol, la órbita inicial es la de la Tierra[3], casi circular (en rojo) con un radio de $1{,}5 \cdot 10^8$ km, una velocidad de 29,1 km/s, y la órbita final es la de Marte (en naranja), aproximadamente circular con un radio de $2{,}3 \cdot 10^8$ km y una velocidad de 23,6 km/s. Necesitamos poner a la nave a 32,0 km/s, para que, movida sólo por su inercia y la atracción del Sol, vaya en una órbita elíptica (en azul) hasta la órbita de Marte. Allí llegará con una velocidad de 20,9 km/s, por lo que necesitará otro impulso de 2,7 km/s para llegar a los 23,6 km/s, que es la velocidad de Marte en su órbita. Para regresar, hará al revés: primero frenará para ponerse a 20,9 km/s, con lo que se pone en la órbita elíptica de transferencia. Al llegar a la órbita terrestre lo hará con una v= 32,0 km/s, y deberá disminuirla con sus motores en 2,9 km/s hasta ponerse a los 29,1 km/s a los que va la Tierra en su órbita circular alrededor del Sol. Esta órbita elíptica de transferencia tiene un periodo de 531 días, por lo que en la ida a Marte se tardaría la mitad de ese tiempo (265,5 días= 8,9 meses), y otro tanto en la vuelta.

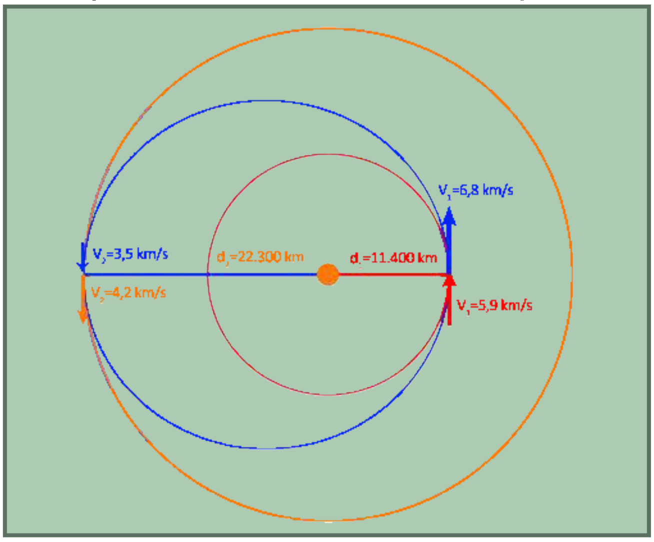

Fig. 10 El viaje de ida y vuelta a Marte tardaría año y medio.

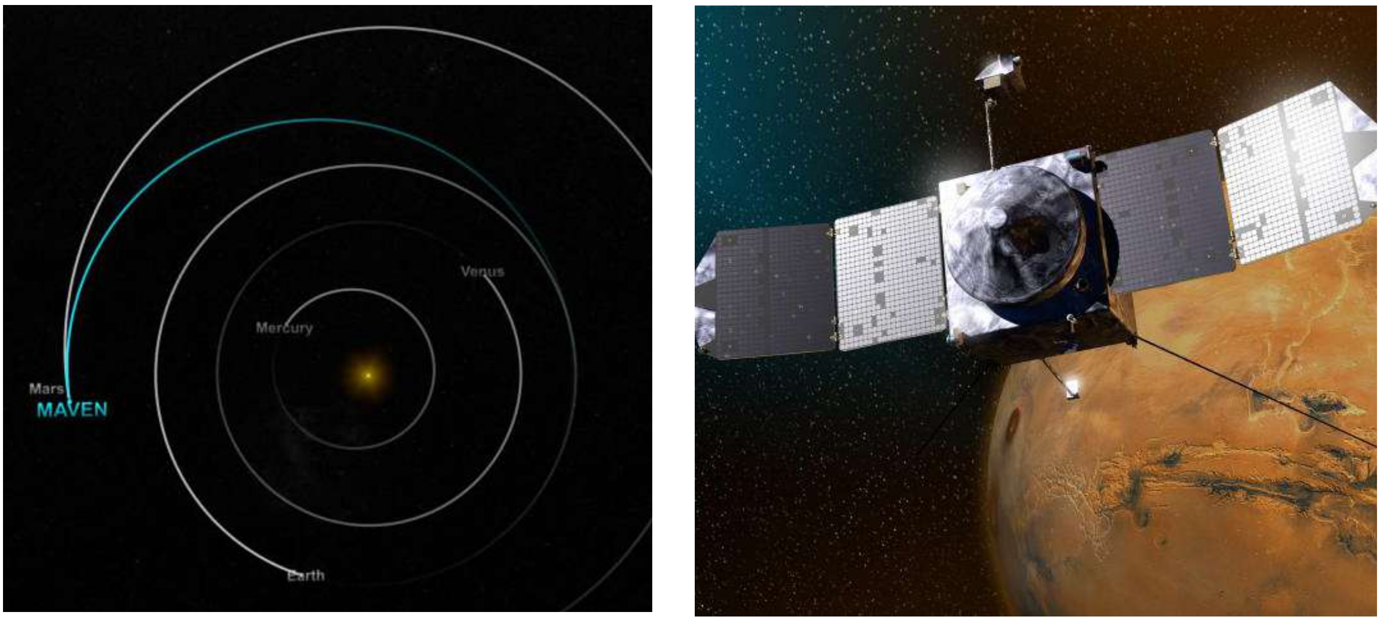

Fig. 11. Misión MAVEN: trayectoria y recreación de su llegada a Marte en 2014.

[3] Las órbitas de la Tierra y Marte se han aproximado a circunferencias de radio su distancia media al Sol.

FÓRMULAS

Las fórmulas necesarias para obtener los datos que he manejado en el artículo se obtienen a partir de la ley de la gravitación universal y de las leyes de conservación de la energía y del momento angular. Como es sabido, aunque históricamente las leyes de Kepler precedieron a la ley de gravitación universal, se pueden deducir de ella.

La masa m del satélite nunca influye. M es la masa de la Tierra, la Luna o el Sol. En el primer caso he tomado de valor $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, en el caso de la Luna $7{,}37 \cdot 10^{22}$ y en el caso del Sol, el valor que he tomado es $1{,}9 \cdot 10^{30}$.

Esas fórmulas son:

1ª En una órbita circular, identificando la fuerza centrípeta con la fuerza de atracción gravitatoria se obtiene:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

2ª En una órbita elíptica, la velocidad en cada punto varía, y también la altura sobre la Tierra. Por la conservación del momento angular, en el punto 1 más cerca a la Tierra (perigeo) y en el punto 2 más alejado (apogeo) se cumple que

$$mv_1 \cdot d_1 = mv_2 \cdot d_2 \rightarrow \boxed{v_2 = \frac{v_1 \cdot d_1}{d_2}}$$

3ª En cualquier punto de una órbita elíptica, la energía total, suma de la potencial y la cinética, es constante:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{d_2}$$

Por tanto, combinando esta fórmula con la anterior, en el apogeo y perigeo se cumplirá que:

$$\boxed{d_2 = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + v_1^2 d_1^2 (v_1^2 - \frac{2GM}{d_1})}}{(v_1^2 - \frac{2GM}{d_1})}}$$

Si tenemos un satélite en órbita circular de radio d_1 y velocidad v, y ésta cambia al valor v_1, la órbita se convierte en elíptica, y con la expresión anterior podemos saber qué alejamiento d_2 adquiere el satélite en el otro extremo de la nueva órbita elíptica. Si el satélite en órbita circular acelera ($v_1>v$), se usa el signo menos delante de la raíz, y si frena ($v_1<v$), se usa el signo más.

4ª El tiempo T que tarda un satélite en dar una vuelta alrededor de la Tierra (o del Sol si fuera el caso), viene dado por la tercera ley de Kepler, que, siendo a el semieje mayor, podemos expresar por:

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3}}$$

5ª Por la primera ley de Kepler, las órbitas de los satélites son elipses. Siguiendo con la misma notación que en los puntos anteriores, los parámetros de esas elipses son (a= semieje mayor, b= semieje menor, e= excentricidad):

$$\boxed{a = \frac{d_1 + d_2}{2} \rightarrow e = \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1} \rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}}$$

TABLAS DE DATOS

TABLA 1

DATOS DE LAS ÓRBITAS TERRESTRES USADAS

Tipo de órbita	d_1 (km)	v_1 (km/s)	d_2 (km)	v_2 (km/s)	e	a (km)	b (km)	T (h)
CIRCULAR	11.400	5,9	11.400	5,9	0,00	11.400	11.400	3,4
ELÍPTICA	11.400	6,8	22.321	3,5	0,32	16.860	15.952	6,1
ELÍPTICA	11.400	5,1	6.763	8,6	0,26	9.081	8.780	2,4
CIRCULAR	6.800	7,7	6.800	7,7	0,00	6.800	6.800	1,6
CIRCULAR	22.321	4,2	22.321	4,2	0,00	22.321	22.321	9,2
CIRCULAR	6.779	7,7	6.779	7,7	0,00	6.779	6.779	1,5
ELÍPTICA	6.779	10,1	42.397	1,6	0,72	24.588	16.953	10,7
CIRCULAR	42.279	3,1	42.279	3,1	0,00	42.279	42.279	24,0

TABLA 2

DATOS DE LAS ÓRBITAS LUNARES

Tipo de órbita	R_{LUNA} (km)	h_1 (km)	d_1 (km)	v_1 (m/s)	h_2 (km)	d_2 (km)	v_2 (m/s)	T (h)
ELÍPTICA	1.738	111	1.849	1.672	315	2.052	1.507	2,1
CIRCULAR	1.738	111	1.849	1.630	111	1.849	1.630	2,0
ELÍPTICA	1.738	111	1.849	1.608	15	1.753	1.697	1,9

TABLA 3

DATOS DE LAS ÓRBITAS DE PLANETAS

Tipo de órbita	Órbita del planeta	d_1 (10^8km)	v_1 (km/s)	d_2 (10^8km)	v_2 (km/s)	e	a (10^8km)	b (10^8km)	T (días)
CIRCULAR	Tierra	1,5	29,1	1,5	29,1	0,00	1,5	1,5	365
CIRCULAR	Marte	2,3	23,6	2,3	23,6	0,00	2,3	2,3	687
ELIPTICA	Transferencia	1,5	32,0	2,3	20,9	0,21	1,9	1,8	531